天津理工大学考试试卷

20XX～20XX 学年第一学期

《数理统计》期末考试试卷

课程代码：1563163　试卷编号：1　命题日期：____ 年 __ 月 __ 日

答题时限：120 分钟　考试形式：闭卷

得分统计表

大题号 / 总分	一	二	三	四

一、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

得分	

1. 设 x_1, x_2, x_3, x_4 是服从正态总体 $N(0,1)$ 的样本, 则统计量 $Y = \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}$ 服从的分布为 ________________.

2. 设样本 $x_1, \ldots, x_n$ 取自两点分布 $b(1,p)$, 考虑参数 p 的最大似然估计，则似然函数取为 $L(p) =$ ________________.

3. 请描述统计推断中的“充分性原则”：________________________________.

4. 设样本 $x_1, \ldots, x_n$ 取自两点分布 $b(1,p)$, 现要求 p 的 $1-\alpha$ 大样本置信区间, 利用中心极限定理, 可取枢轴量为 $u =$ ________________.

5. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自密度为 $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ 的样本，对检验问题 $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_0 : \theta \in \Theta \backslash \Theta_0$，似然比检验所使用的检验统计量为 ________________.

二、选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

得分	

1. 设样本 $x_1,\dots,x_n$ 取自总体 x，则偏差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 的自由度是（　　）

A. $n-1$　　B. n　　C. $n+1$　　D. 1

2. 设随机变量 $X \sim t(n), n>1$，令 $Y=X^2$，则（　　）

A. $Y\sim\chi^2(n)$　　B. $Y\sim\chi^2(n-1)$　　C. $Y\sim F(n,1)$　　D. $Y\sim F(1,n)$

3. 设总体方差为 $Var(X)=\sigma^2$，则样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ 是 σ 的（　　）

A. 无偏估计　　B. 有效估计

C. 相合估计　　D. 以上都不对

4. 在一次假设检验中，下列说法正确的是（　　）

A. 既可能犯第一类错误，也可能犯第二类错误.

B. 如果备择假设是正确的，但拒绝了备择假设，则犯了第一类错误.

C. 增大样本容量，则犯两类错误的概率都不变.

D. 如果原假设是错误的，但接受了原假设，则犯了第二类错误.

5. 在假设检验中, 如果所计算的 p 值越小，说明（　　）

A. 原假设越真实;　　B. 备择假设越不真实;

C. 否定原假设证据越不充分;　　D. 否定原假设证据越充分.

三、计算题 (每题 10 分，共 40 分)

得分	

1. 设样本 $x_1, \ldots, x_n$ 取自均匀分布 $U(\theta, \theta+1)$, 求 θ 的矩估计和最大似然估计.

2. 设一页书上的错别字个数 X 服从泊松分布 $p(\lambda)$, λ 有两个可能取值 1.5 和 1.8, 先验分布为

$$P(\lambda = 1.5) = 0.45, \quad P(\lambda = 1.8) = 0.55,$$

现检查了一页, 发现 3 个错别字, 试求 λ 的后验分布. (注: $\mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.22313$, $\mathrm{e}^{-1.8} \approx 0.1653$.)

3. 假定某种元件的寿命服从指数分布 $e(1/\theta)$, 现取 5 个元件投入试验, 观测到如下失效时间:

$$395 \quad 4094 \quad 119 \quad 11572 \quad 6133 \quad (\text{单位: 小时})$$

经计算, 样本均值 $\bar{x} = 4462.6$. 对显著水平 $\alpha = 0.05$, 能否认为元件的平价寿命不小于 6000 小时? ($\chi^2_{0.05}(10) = 3.94$.)

4. 研究某种传统中药对疟疾的治疗效果，获得了如下数据：

	痊愈数	未痊愈数	合计
对照组	114	36	150
中药组	132	18	150
合计	246	54	300

对显著水平 $\alpha = 0.05$, 试问该中药对治疗疟疾是否有显著效果? ($\chi^2_{0.95}(1) = 3.8415.$)

四、证明题 (每题 10 分，共 20 分)

得分	

1. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是取自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本,

   1). 设 T 是 $g(\mu) = \mu^2$ 的任一无偏估计, 证明 $\mathbf{Var}(T)$ 的 C-R 下界为 $4\mu^2/n$;

   2). 求 μ^2 的 UMVUE, 并证明此 UMVUE 达不到 C-R 下界, 即它不是有效估计.

   (注: 设 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则有 $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^2(\mu^2 + \sigma^2)$.)

2. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的样本, 证明当样本量 n 较大时, λ 的近似 $1-\alpha$ 置信区间为 $\left[\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{x}/n},\ \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{x}/n}\right]$.